ЧАСТЬ II
ЕВКЛИДОВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ

Глава 3
Евклидова дифференциальная геометрия

§ 8. Кривые евклидова пространства.

8.1. **РЕГУЛЯРНАЯ КРИВАЯ**. Задано отображение $\rho:\mathbf{I}\to\mathbf{E}^3$ интервала $\mathbf{I}$ действительной оси $\mathbf{R}$ в 3-мерное евклидово пространство. Интервал $\mathbf{I}$ может совпадать с $\mathbf{R}$. Требуется, чтобы отображение ρ было взаимно однозначным и взаимно непрерывным, т.е. ρ – *гомеоморфизм*. В отображении ρ всякому значению $t\in\mathbf{I}$ соответствует точка $M\in\mathbf{E}^3$. В пространстве $\mathbf{E}^3$ введен ортонормированный репер $\mathbf{B}=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, точка M имеет координаты в репере $\mathbf{B}$: $M=(x,y,z)$. С изменением значения t на интервале $\mathbf{I}$ изменяются координаты точки M, они являются функциями параметра t: $M(t) = (x(t),y(t),z(t))$. Три функции координат точки $M(t)$ в рассматриваемом порядке составляют векторную функцию

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\ t\in\mathbf{I}.$$

Образ отрезка $\mathbf{I}$ в отображении ρ называется *кривой* евклидова пространства. Кривая есть множество точек

$$l=\{M\mid OM=\vec{r}(t),\ t\in\mathbf{I}\}.$$

Указанное множество точек M называется еще *годографом* векторной функции $\vec{r}=\vec{r}(t)$.

Если $\vec{r}\,'(t)$ непрерывна и $\vec{r}\,'(t)\neq 0$, то кривая $\vec{r}(t)$ называется гладкой в окрестности точки t_o. Если кроме того, существуют производные векторной функции $\vec{r}(t)$ до порядка n включительно, то кривая в окрестности точки t_o называется регулярной класса C^n, $n\geq 2$. Точка кривой, в окрестности которой кривая регулярная, называется *обыкновенной*.

Далее рассматриваем регулярные класса C^3 кривые, интервал $\mathbf{I}$ считаем окрестностью точки t этого интервала, $\vec{r}\,'(t)\neq 0$, существуют $\vec{r}\,''$, $\vec{r}\,'''$, векторы $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$ неколлинеарны.

8.2. **ДЛИНА ДУГИ. ЕСТЕСТВЕННЫЙ ПАРАМЕТР КРИВОЙ**. Из анализа известно, что длина дуги кривой $\vec{r}(t)$ на интервале $[t_o,t_1]$ равна

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}|\vec{r}\,'|dt.$$

Зафиксируем точку t_o, точку t считаем изменяющейся. Имеем функцию

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{r}\,'| dt,$$

это функция положительная, т.к. $|\vec{r}\,'| > 0$, и монотонно возрастающая. Подинтегральное выражение есть дифференциал дуги

(8.2.1) $$ds = |\vec{r}\,'(t)| dt.$$

Функция $s = s(t)$ непрерывна и монотонна, поэтому она обратима. Существует функция $t = t(s)$, тоже непрерывная и монотонная. Обе функции $s(t)$ и $t(s)$ дифференцируемы одинаковое число раз.

8.2.1. ЛЕММА. *Вектор производной векторной функции по длине дуги этой функции является единичным.*

Равенство (8.2.1.) записываем в виде

(8.2.2) $$\frac{ds}{dt} = s'_t = |\vec{r}\,'(t)|.$$

Рассматриваем сложную функцию $\vec{r}(t(s))$. Ее производная такова:

$$\vec{r}_s\,' = \vec{r}\,' t'_s = \vec{r}\,' \frac{1}{s'_t} = \vec{r}\,' \frac{1}{|\vec{r}\,'|}.$$

Здесь мы воспользовались правилом дифференцирования обратной функции: $t'_s = \dfrac{1}{s'_t}$ и равенством (8.2.2). Теперь найдем модуль вектора $\vec{r}_s\,'$.

$$|\vec{r}_s\,'| = |\vec{r}\,'| \frac{1}{|\vec{r}\,'|} = 1,$$

следовательно $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$. #

Заменим параметризацию кривой $\vec{r}(t)$, вместо параметра t подставим его функцию от s

$$\vec{r}(t(s)) = \vec{r}(s) = (x(t(s)), y(t(s)), x(t(s))) = (x(s), y(s), z(s)).$$

Интервал задания функции $\vec{r}(s)$ обозначаем $\mathbf{I}$, хотя он отличается от интервала значений параметра t. Параметризация векторной функции, задающей кривую в $\mathbf{E}^3$, длиной дуги этой кривой называется *естественной*, это параметризация

$$\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)), \; s \in \mathbf{I},$$

s называется *естественным параметром* кривой. Обозначения производных по параметру s: $\vec{r}_s\,' = \dfrac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{r}_{ss}\,'' = \ddot{\vec{r}}$ и т.д.

Лемму 8.2.1. сформулируем в следующем виде.

8.2.2. ЛЕММА. *Вектор первой производной векторной функции в естественной параметризации имеет постоянную единичную длину*: $|\dot{\vec{r}}| = 1$.

8.2.3. ЛЕММА. *Вектор производной вектора постоянного модуля перпендикулярен этому вектору.*

\# Выполняется $\vec{r}^{\,2} = |\vec{r}|^2$. Продифференцируем равенство $\vec{r}^{\,2} = C$: $2\vec{r}\vec{r}\,' = 0$. А это означает $\vec{r}\,' \perp \vec{r}$. #

8.3. **КАСАТЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ И НОРМАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ КРИВОЙ**. Вектор $\vec{r}\,'(t_o)$ является вектором касательной кривой $\vec{r}(t)$ в точке t_o. Обозначим точку кривой $\vec{r}(t)$, соответствующую значению параметра t_o, через P, т.е. $P = P(t_o)$. Плоскость, проходящая через точку $P(t_o)$ кривой и перпендикулярная вектору $\vec{r}\,'(t_o)$, называется нормальной плоскостью кривой в точке t_o. По вектору $\vec{r}\,'(t_o)$ = $(x'(t_o), y'(t_o), z'(t_o))$ и точке $P(t_o)$ = $(x(t_o), y(t_o), z(t_o))$ запишем уравнения касательной прямой и нормальной плоскости кривой $\vec{r}(t)$:

$$\frac{x - x(t_o)}{x'(t_o)} = \frac{y - y(t_o)}{y'(t_o)} = \frac{z - z(t_o)}{z'(t_o)};$$

$$x'(t_o)(x - x(t_o)) + y'(t_o)(y - y(t_o)) + z'(t_o)(z - z(t_o)) = 0.$$

8.3.1. ТЕОРЕМА. *Положение касательной прямой кривой $\vec{r}(t)$ в каждой ее точке не зависит от параметризации кривой.*

\# Пусть $\vec{r}(t)$ произвольная параметризация кривой, $\vec{r}(s)$ есть естественная параметризация и пусть $s = s(t)$. Тогда $\vec{r}_t\,' = (\vec{r}(s(t)))_t'$ = $\vec{r}_s\,' s_t' = \dot{\vec{r}} s'$, т.е. векторы $\vec{r}\,'$ и $\dot{\vec{r}}$ коллинеарны. Обозначим $s = s(t)$. Прямые $< P, \vec{r}\,'(t) >$, $< P, \dot{\vec{r}}(s) >$ совпадают. #

Единичный вектор касательной обозначается через $\vec{t}$.

8.4. **КАСАТЕЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ**. При движении точки $M(t)$ по кривой $\vec{r}(t)$ вектор $\vec{r}(t)$ изменяется. Имеем отображение точек кривой в векторное пространство при каждом значении t:

$$M(t) \to \vec{r}\,'(t).$$

Это *касательное отображение вдоль кривой* $\vec{r}(t)$. Рассмотрев всевозможные кривые евклидова пространства $\mathbf{E}^3$, проходящие через точку P, и касательные отображения вдоль этих кривых, *имеем касательное отображение евклидова пространства* $\mathbf{E}^3$ *в его векторное пространство* $\mathbf{V}^3$ *в точке* P. Множество касательных отображений $\mathbf{E}^3 \to \mathbf{V}^3$ во всех точках P называется *касательным расслоением*.

8.5. **СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ**. Рассмотрим плоскости, проходящие через касательную кривой $\vec{r}(t)$ в точке $P = P(t_o)$ кривой.

При изменении параметра t получаем вектор $\vec{r}\,'(t_o+\Delta t)$. Для вектора $\vec{r}\,'(t_o+\Delta t)$ имеет место формула Тейлора

$$\vec{r}\,'(t_o+\Delta t) = \vec{r}\,'(t_o) + \vec{r}\,''(t_o)\Delta t + \vec{o}(\Delta t),$$

$\vec{o}(\Delta t)$ бесконечно малое векторное слагаемое, более высокого порядка, чем Δt. Точка $M(t_o+\Delta t)$ кривой и касательная $\langle P, \vec{r}\,'(t_o)\rangle$ определяют плоскость П = $\langle P, \vec{r}\,'(t_o), \vec{r}\,'(t_o+\Delta t)\rangle$. Нормальный вектор этой плоскости есть $\vec{r}\,'(t_o)\times\vec{r}\,'(t_o+\Delta t)$. Найдем нормаль плоскости П при $M\to P$, т.е. при $\Delta t\to 0$. Имеем

$$\vec{r}\,'(t_o)\times\vec{r}\,'(t_o+\Delta t) = \vec{r}\,'(t_o)\times\left(\vec{r}\,'(t_o) + \vec{r}\,''(t_o)\Delta t + \vec{o}(\Delta t)\right) =$$

$$= \vec{r}\,'(t_o)\times\vec{r}\,''(t_o)\Delta t + \vec{r}\,'(t_o)\times\vec{o}(\Delta t).$$

При $\Delta t\to 0$ второе слагаемое стремится к $\vec{o}$ быстрее, чем $\Delta t\to 0$. Следовательно, нормали рассматриваемых плоскостей незначительно отличаются от вектора $\vec{r}\,'(t_o)\times\vec{r}\,''(t_o)$. (Мы рассматриваем регулярные кривые, этот вектор существует.) С уменьшением Δt уменьшается длина вектора нормали, направление ее стремится к неизменному направлению $\vec{r}\,'(t_o)\times\vec{r}\,''(t_o)$.

Плоскость $\langle P, \vec{r}\,'(t_o), \vec{r}\,''(t_o)\rangle$ называется *соприкасающейся* плоскостью кривой в точке t_0. Уравнение соприкасающейся плоскости

$$\begin{vmatrix} x-x(t_o) & y-y(t_o) & z-z(t_o) \\ x'(t_o) & y'(t_o) & z'(t_o) \\ x''(t_o) & y''(t_o) & z''(t_o) \end{vmatrix} = 0.$$

8.5.1. ТЕОРЕМА. *Положение соприкасающейся плоскости не зависит от параметризации кривой.*

Рассматриваем кривую в произвольной параметризации $\vec{r}(t)$ и в естественной параметризации $\vec{r}(s)$, $s=s(t)$. Имеем $\vec{r}\,'=\dot{\vec{r}}s'$, $\vec{r}\,''=\ddot{\vec{r}}s'^2+\dot{\vec{r}}s''$. Линейные пространства $\langle\vec{r}\,',\vec{r}\,''\rangle$ и $\langle\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\rangle$ совпадают, следовательно, совпадают и плоскости $\langle P,\vec{r}\,',\vec{r}\,''\rangle$, $\langle P,\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\rangle$.

Касательная прямая и соприкасающаяся плоскость называются еще соответственно первой и второй соприкасающимися плоскостями кривой. Соединяем теоремы 8.3.1 и 8.5.1:

8.5.2. ТЕОРЕМА. *Соприкасающиеся плоскости регулярной кривой существуют, их положение не зависит от параметризации кривой*. #

8.6. **СОПРОВОЖДАЮЩИЙ РЕПЕР КРИВОЙ**. Пусть

$$\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)),\ s\in\mathbf{I},$$

регулярная класса C^3 кривая. Во всякой ее обыкновенной точке P существует касательная $<P,\dot{\vec{r}}(s)>$, $\dot{\vec{r}} = \vec{t}$ единичный вектор касательной, см. пп. 8.2 и 8.3. Имеем $\dot{\vec{t}}=\ddot{\vec{r}}$ и по лемме 8.2.3, $\ddot{\vec{r}}\perp\dot{\vec{r}}$, т.е. $\dot{\vec{t}}\perp\dot{\vec{r}}$. Вектор $\ddot{\vec{r}}$ определяет нормаль $\langle P,\ddot{\vec{r}}\rangle$ кривой $\vec{r}(s)$ в точке P, она называется *главной нормалью* кривой $\vec{r}(s)$ в точке P. Кривая в любой своей точке имеет бесконечно много нормалей, составляющих нормальную плоскость кривой. Вектор $\vec{n} = \dfrac{\ddot{\vec{r}}}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|}$ называется *единичным вектором главной нормали кривой*. Вектором *бинормали* называется вектор, перпендикулярный соприкасающейся плоскости кривой, *единичный вектор бинормали* обозначается $\vec{b}$, $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$, имеем $\vec{b} \parallel \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$, точнее,

$$\vec{b} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|},$$

$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$ есть векторное произведение векторов $\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}$. Прямая $\langle P, \vec{b} \rangle$ называется *бинормалью* кривой.

С кривой связан *сопровождающий репер* $(P, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$, P точка движется по кривой. Координатные оси: $< P, \dot{\vec{r}} >$ = $\langle P, \vec{t} \rangle$ касательная, $\langle P, \vec{n} \rangle$ главная нормаль, $\langle P, \vec{b} \rangle$ бинормаль. Координатные плоскости: $\langle P, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}} \rangle$ = $\langle P, \vec{t}, \vec{n} \rangle$ соприкасающаяся, $\langle P, \vec{n}, \vec{b} \rangle$ нормальная, $\langle P, \vec{t}, \vec{b} \rangle$ *спрямляющая*.

§ 9. Кривизна и кручение кривой

9.1. **КРИВИЗНА КРИВОЙ**. На регулярной кривой $\vec{r}(s)$ возьмем точку $P = P(s_o)$ и точку $M = M(t_o + \Delta s)$. Угол между касательными $< P, \dot{\vec{r}} >$ и $\langle M, \dot{\vec{r}}(s_o + \Delta s) \rangle$ обозначим через φ. Изменению Δs параметра s соответствует изменение $\Delta \varphi$ угла между касательными. Обозначим:

$$k_1 = \lim \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|.$$

Имеем: k_1 = $\left|\dot{\vec{t}}\right|$, это скорость вращения единичного вектора касательной; $k_1 = \left|\ddot{\vec{r}}\right|$. Таким образом, справедливо равенство

$$\dot{\vec{t}} = k_1 \vec{n} \text{ и } \ddot{\vec{r}} = k_1 \vec{n}.$$

Во всякой точке кривой $\vec{r}(s)$:

$$\ddot{\vec{r}}(s) = k_1(s)\vec{n} \text{ и } k_1(s) = \left\|\ddot{\vec{r}}(s)\right\|.$$

Величина k_1 называется *кривизной* или *первой кривизной* кривой $\vec{r}(s)$ в точке P; функция k_1 = $k_1(s)$ называется *функцией кривизны* кривой $\vec{r}(s)$, $k_1 \geq 0$, $\ddot{\vec{r}}(s)$ – *вектор кривизны* кривой $\vec{r}(s)$. Величина $R = \dfrac{1}{k_1}$ называется *радиусом кривизны* кривой $\vec{r}(s)$ в точке P. В направлении вектора кривизны $\vec{n}$ откладывается отрезок $PQ = R$. Окружность $\omega(Q, R)$ с центром Q и радиусом R называется окружностью кривизны в точке P или *соприкасающейся* *окружностью* кривой $\vec{r}(s)$ в токе P. Она касается кривой $\vec{r}(s)$ и ее касательной в точке P.

9.2. **КРКУЧЕНИЕ КРИВОЙ**. Отметим уже известные соотношения

(9.2.1) $$\vec{n} \perp \dot{\vec{n}},\ \vec{n} \perp \vec{t}.$$

Продифференцируем равенство $\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$:

$$\dot{\vec{b}} = \dot{\vec{t}} \times \vec{n} + \vec{t} \times \dot{\vec{n}} = \vec{t} \times \dot{\vec{n}},$$

так как $\dot{\vec{t}} \parallel \vec{n}$, то $\dot{\vec{t}} \times \vec{n} = \vec{o}$. Значит,

$$\dot{\vec{b}} \perp \vec{t},\ \dot{\vec{b}} \perp \dot{\vec{n}}.$$

Отсюда и из (9.2.1) следует

$$\dot{\vec{b}} \parallel \vec{n}.$$

Положим

(9.2.2) $$\dot{\vec{b}} = -k_2 \vec{n}.$$

Величина k_2 называется *кручением* кривой $\vec{r}(s)$ или *второй кривизной* кривой $\vec{r}(s)$ в точке P. Вектор $\dot{\vec{b}}$ называется *вектором кручения*. При движении точки P по кривой $\vec{r}(s)$, т.е. с изменением параметра s имеем функцию $k_2 = k_2(s)$ – *функцию кручения*. Знак величины k_2 может быть и положительным и отрицательным.

Кривизна кривой равна скорости вращения единичного вектора $\vec{t}$ касательной кривой. Кручение кривой равно скорости вращения единичного вектора $\vec{b}$ бинормали кривой.

9.3. **ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ**. Ранее найдены разложения векторов $\dot{\vec{t}}$, $\dot{\vec{b}}$ по векторам подвижного репера $(P, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ кривой. Найдем разложение $\dot{\vec{n}}$ в том же базисе:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t},\ \dot{\vec{n}} = \dot{\vec{b}} \times \vec{t} + \vec{b} \times \dot{\vec{t}} = -k_2 \vec{n} \times \vec{t} + \vec{b} \times k_1 \vec{n} = k_2 \vec{b} - k_1 \vec{t},$$

или окончательно

$$\dot{\vec{n}} = -k_1 \vec{t} + k_2 \vec{b}.$$

Полученные разложения

$$\dot{\vec{t}} = k_1 \vec{n},\ \dot{\vec{n}} = -k_1 \vec{t} + k_2 \vec{b},\ \dot{\vec{b}} = -k_2 \vec{n}$$

называются *формулами Френе*. Им соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{pmatrix},$$

являющаяся кососимметрической. Первая и третья формулы Френе вводят две скалярные характеристики кривой – кривизну и кручение кривой. Согласно второй формуле Френе, дифференцирование второго вектора сопровождающего репера новых, по сравнению с полученными, характеристик кривой не вводит.

9.4. **УПЛОЩЕНИЕ КРИВОЙ**. Определим вид кривой, имеющей нулевое кручение, нулевую кривизну.

Пусть $k_2 = 0$. Согласно (9.1.1), $\dot{\vec{b}} = \vec{o}$. Следовательно, $\vec{b}$ постоянный вектор. Это нормальный вектор соприкасающейся плоскости. Вектор не изменяется, значит, перпендикулярная ему плоскость параллельна сама себе. Вектор $\vec{t}$ касательной остается перпендикулярным вектору $\vec{b}$, это вектор соприкасающейся плоскости, т.е. соприкасающаяся плоскость не изменяет своего положения при движении точки по кривой, она скользит сама по себе. Это означает, что кривая $\vec{r}(s)$ лежит в своей соприкасающейся плоскости.

Обратно, если кривая $\vec{r}(s)$ плоская, то векторами ее плоскости являются $\vec{t}$ и $\vec{n}$, вектор $\vec{b}$ имеет постоянное направление, перпендикулярное плоскости кривой, и длина его постоянна, следовательно, $\dot{\vec{b}} = \vec{o}$ и кручение кривой равно нулю. Получена

9.4.1. ТЕОРЕМА. *Кручение k_2 кривой $\vec{r}(s)$ равно нулю, если и только если кривая $\vec{r}(s)$ плоская*. #

Кроме того, выполняется

9.4.2. СВОЙСТВО. *Плоская кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости*. #

Плоская кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости, вектор ее нормали $\vec{b}$ в этом случае постоянен, скорость его вращения равна нулю, поэтому кручение плоской кривой равно нулю.

Пусть теперь $k_1 = 0$. Используем определение кривизны кривой, п. 9.1: $\dot{\vec{t}} = k_1\vec{n}$. При $k_1 = 0$ вектор касательной $\vec{t}$ имеет неизменное направление, тогда $\vec{r}(s)$ – прямая линия. Верно и обратное. Справедлива

9.4.3. ТЕОРЕМА. *Кривизна k_1 линии $\vec{r}(s)$ равна нулю, если и только если $\vec{r}(s)$ прямая линия*. #

Если $k_1 = 0$, то $\dot{\vec{t}} = \ddot{\vec{r}} = \vec{o}$ и о векторах $\vec{n}, \vec{b}$ ничего сказать нельзя. Точки кривой, в которых $k_1 = 0$, называются точками *распремления*.

9.5. **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ КРИВОЙ**. Если кривая задана в естественной параметризации $\vec{r} = \vec{r}(s)$, то согласно п. 9.1, по определению кривизны кривой, $k_1 = \left|\ddot{\vec{r}}\right|$, следовательно,

$$k_1 = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

есть формула для вычисления кривизны k_1 кривой $\vec r(s)$ в естественной параметризации. Для вычисления кручения k_2 воспользуемся векторами производных $\dot{\vec r},\ddot{\vec r},\dddot{\vec r}$. Имеем:

$$\dot{\vec r} = \vec t\,,\ \ddot{\vec r} = k_1\vec n\,,\ \dddot{\vec r} = \dot k_1\vec n + k_1\dot{\vec n} = \dot k_1\vec n + k_1(-k_1\vec t + k_2\vec b) = -\dot k_1\vec t + \dot k_1\vec n + k_1k_2\vec b\,.$$

Здесь мы взяли вторую формулу Френе. Вычислим смешанное произведение векторов $\dot{\vec r},\ddot{\vec r},\dddot{\vec r}$, учитывая

(9.5.1) $$\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r} = k_1\vec b\,.$$

$$\dot{\vec r}\,\ddot{\vec r}\,\dddot{\vec r} = (\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r})\dddot{\vec r} = k_1\vec b\left(-\dot k_1\vec t + \dot k_1\vec n + k_1k\ \vec b\right) = k_1^2k_2\vec b^2 = k_1^2k_2\,.$$

Таким образом,

(9.5.2) $$\dot{\vec r}\,\ddot{\vec r}\,\dddot{\vec r} = k_1^2k_2\,.$$

Отсюда

$$k_2 = \frac{\dot{\vec r}\,\ddot{\vec r}\,\dddot{\vec r}}{k_1^2} = \frac{\dot{\vec r}\,\ddot{\vec r}\,\dddot{\vec r}}{\ddot{\vec r}^2}\,.$$

Выражение в координатах:

$$k_2 = \frac{\begin{vmatrix}\dot x & \dot y & \dot z\\ \ddot x & \ddot y & \ddot z\\ \dddot x & \dddot y & \dddot z\end{vmatrix}}{\ddot x^2 + \ddot y^2 + \ddot z^2} = \frac{(\dot y\ddot z - \ddot y\dot z)\dddot x - (\dot x\ddot z - \ddot x\dot z)\dddot y + (\dot x\ddot y - \ddot x\dot y)\dddot z}{\ddot x^2 + \ddot y^2 + \ddot z^2}\,.$$

Пусть теперь кривая задана в произвольной параметризации $\vec r = \vec r(t)$. Выразим $\dot{\vec r},\ddot{\vec r},\dddot{\vec r}$ через $\vec r',\vec r'',\vec r'''$, учитывая $t = t(s)$ и $\frac{ds}{dt} = |\vec r'|$, см. (8.2.2).

$$\dot{\vec r} = \frac{d\vec r}{ds} = \vec r'\frac{dt}{ds}\,,\ \ddot{\vec r} = \frac{d^2\vec r}{ds^2} = \vec r''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec r'\frac{d^2t}{ds^2}\,,$$

$$\dddot{\vec r} = \vec r'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 3\vec r''\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2} + \vec r'\frac{d^3t}{ds^3}\,.$$

Имеем:

$$\dot{\vec r}\times\ddot{\vec r} = \vec r'\times\vec r''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3,\ \dot{\vec r}\,\ddot{\vec r}\,\dddot{\vec r} = \vec r'\,\vec r''\,\vec r'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^6.$$

По (9.5.1),

$$k_1\vec b = \vec r'\times\vec r''\left(\frac{dt}{ds}\right) = \frac{\vec r'\times\vec r''}{|\vec r'|^3}\,.$$

Переходя к модулям векторов, получаем

$$k_1 = \frac{|\vec r'\times\vec r''|}{|\vec r'|^3}\,.$$

По (9.5.2), $k_1^2k_2 = \dfrac{\vec r'\,\vec r''\,\vec r'''}{|\vec r'|^6} = \dfrac{\vec r'\,\vec r''\,\vec r'''}{|\vec r'\times\vec r''|}k$, значит,

$$k_2 = \frac{\vec r'\,\vec r''\,\vec r'''}{|\vec r'\times\vec r''|^2}\,.$$

Запишем формулы для k и k_2 в координатах:

$$k_1 = \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (x'z'' - x''z')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}},$$

$$k_2 = \frac{(y'z'' - y''z')x''' - (x'z'' - x''z')y''' + (x'y'' - x''y')z'''}{(y''z' - y''z')^2 - (x'z'' - x''z')^2 + (x'y'' - x''y')^2}.$$

Если кривая $\vec{r}(t)$ задана в плоскости Oxy, т.е. $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, то $k_2 = 0$, и

$$k_1 = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

9.6. **ПРЯМАЯ, ОКРУЖНОСТЬ, ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ.** Выше, в п. 9.1, установлено, что кривизна *прямой линии* равна нулю, также и кручение ее равно нулю:

$$k_1 = 0, \ k_2 = 0.$$

Рассмотрим *окружность* радиуса a:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t.$$

Находим: $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$; $x'' = -a\cos t$, $y'' = -a\sin t$; $x'^2 + y'^2 = a^2$, $|x'y'' - y'x''| = a^2$,

$$k_1 = \frac{1}{a}.$$

Кривизна окружности постоянна и обратна ее радиусу. Кручение $k_2 = 0$, т.к. линия плоская, п. 9.1.

Винтовая линия задается уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt.$$

Она намотана на круглый цилиндр радиуса a и шаг линии равен b. Вычисления дают: $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$; $x'' = -a\cos t$, $y'' = -a\sin t$, $z'' = 0$; $x''' = a\sin t$, $y''' = -a\cos t$, $z''' = 0$. $\vec{r}' = \sqrt{a^2 + b^2}$, $|\vec{r}' \times \vec{r}''| = = a\sqrt{a^2 + b^2}$, $\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}''' = a^2 b$.

$$k_1 = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}; \quad k_2 = \frac{\vec{r}'\vec{r}''\vec{r}'''}{(\vec{r}' \times \vec{r}'')^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Кривизны винтовой линии постоянны.

9.7. **ЗАДАНИЕ КРИВОЙ ФУНКЦИЯМИ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ**. Оказывается, имея функции кривизны и кручения

$$k_1 = k_1(s) > 0 \text{ и } k_2 = k_2(s)$$

и формулы Френе, п. 9.3, можно получить векторное задание кривой $\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ в некотором репере пространства. Функции кривизны и кручения называются *натуральными уравнениями* кривой. Этих функций две, а определяются три функции $x(s), y(s), z(s)$. Зависимости между векторами подвижного репера кривой и производными этих векторов позволяет найти компоненты функции $\vec{r}(s)$ по функциям $k_1(s)$ и $k\ (s)$, см. [2, 20]. Кривая натуральными уравнениями определяется с точностью до положения в пространстве.

9.8. **ЛИНИИ ПОСТОЯННЫХ КРИВИЗН**. Евклидово пространство обладает только следующими линиями, имеющими постоянную кривизну k и постоянное кручение m:

(1) прямая $\vec{r}(t) = (a^1 t + b^1, a^2 t + b^2, a^3 t + b^3)$, $k = m = 0$;

(2) окружность $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, $k = \dfrac{1}{R}$, $m = 0$;

(3) винтовая линия $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a = \dfrac{k}{k^2 + m^2}$, $b = \dfrac{m}{k^2 + m^2}$.

9.9. **СТРОЕНИЕ КРИВОЙ ВБЛИЗИ ОБЫКНОВЕННОЙ ТОЧКИ**. Пусть P точка регулярной плоской кривой $\vec{r}(s)$. Если кривизна кривой в точке P равна нулю, то в малой окрестности этой точки линия $\vec{r}(s)$ есть отрезок прямой. Если в точке P кривизна $k_1 = a \neq 0$, то в малой окрестности этой точки $\vec{r}(s)$ есть дуга окружности радиуса $\dfrac{1}{a}$.

Рассмотрим пространственную кривую $\vec{r}(s)$ в сопровождающем репере $(P, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$. Если в точке P кривой $k_2 = 0$, то кривая плоская и она описана выше, п. 9.4. Пусть $k_1 \neq 0$, $k \neq 0$ в точке $P = P(s)$ и пусть $M = M(s + \Delta s)$ близкая к точке P точка кривой $\vec{r}(s)$. Для малого Δs дугу PM можно заменить вектором $\Delta\vec{r}$. Имеется разложение в ряд Тейлора

$$\Delta\vec{r} = \dot{\vec{r}}\Delta s + \frac{1}{2}\ddot{\vec{r}}\Delta s^2 + \frac{1}{6}\dddot{\vec{r}}\Delta s^3 + \ldots + \vec{o}(\Delta s^3),$$

производные $\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}$ вычислены в точке P, $\vec{o}(\Delta s^3)$ – слагаемое более высокого порядка малости, чем Δs^3. В п. 9.5 выписаны выражения векторов производных в сопровождающем репере кривой

$$\dot{\vec{r}} = \vec{t}\,, \quad \ddot{\vec{r}} = k_1\vec{n}\,, \quad \dddot{\vec{r}} = -\dot{k}_1\vec{t} + \dot{k}_1\vec{n} + k_1 k_2\vec{b}\,.$$

Подставим эти выражения в разложение $\Delta\vec{r}$ и напишем разложение $\Delta\vec{r}$ в базисе $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$:

$$\Delta\vec{r} = (\Delta s + \ldots)\vec{t} + (\frac{1}{2}k_1\Delta s^2 + \ldots)\vec{n} + (\frac{1}{6}k_1 k_2\Delta s^3 + \ldots)\vec{b}\,.$$

В таблицах ниже показано, как изменяются знаки проекций вектора $\Delta\vec{r}$ на векторы репера $(P, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ при переходе точки M через точку P, т.е. при изменении знака Δs с – на +.

$k_2 > 0$		
$\vec{t}$	–	+
$\vec{n}$	+	+
$\vec{b}$	–	+

$k_2 < 0$		
$\vec{t}$	–	+
$\vec{n}$	+	+
$\vec{b}$	+	–

Кривая $\vec{r}(s)$ в окрестности точки P при $k_2 > 0$ проектируется сначала на вектор $-\vec{t}$, затем на вектор $+\vec{t}$; проектируется только на вектор $+\vec{n}$ и проектируется сначала на вектор $-\vec{b}$, затем на вектор $+\vec{b}$. Значит, при $k_2 > 0$ кривая в окрестности точки P закручивается правым винтом. При $k_2 < 0$ кривая в окрестности точки P закручивается левым винтом.

§ 10. Поверхности евклидова пространства

10.1. **РЕГУЛЯРНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ**. На евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$ выбрана некоторая область $\mathbf{D}$, гомеоморфная прямоугольнику. Можно считать, что $\mathbf{D}$ прямоугольник. Он состоит из точек $H(u,v)$, $\mathbf{D} = [a,b]\times[c,d]$, т.е. $a \le u \le b$, $c \le v \le d$ и $(u,v) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2$, область $\mathbf{D}$ может совпадать с $\mathbf{R}^2$. Плоскость $\mathbf{E}^2$ есть пара $(\mathbf{R}^2, \mu)$, где μ евклидова метрика на $\mathbf{R}^2$. Задано отображение

$$\pi:\ \mathbf{D} \to \mathbf{E}^3$$

плоской области $\mathbf{D}$ в евклидово пространство $\mathbf{E}^3 = (\mathbf{R}^3, \mu)$, в котором точке $H(u,v)$ из $\mathbf{D}$ соответствует точка $P(x,y,z)$ из $\mathbf{E}^3$, в $\pi : H \to P$. Отображение π является гомеоморфным – взаимно однозначным и взаимно непрерывным. В $\mathbf{E}^3$ выбран ортонормированный репер $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. При изменении точки H в области $\mathbf{D}$ изменяется точка P в пространстве $\mathbf{E}^3$. Координаты x,y,z точки P являются функциями координат точки H:

$$x = x(u,v),\ y = (u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v) \in \mathbf{D}.$$

Эти функции непрерывны, ввиду того, что отображение π гомеоморфно. Таким образом, имеется векторная функция двух параметров

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in \mathbf{D}.$$

Отображение π и образ области $\mathbf{D}$ в отображении π называется поверхностью. Поверхность есть множество точек

$$\mathbf{\Pi} = \{P \mid OP = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in \mathbf{D}.$$

Задается поверхность векторной функцией

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v).$$

Поверхность $\mathbf{\Pi}$ составляют концы векторов $OP = \vec{r}$, поэтому поверхность $\mathbf{\Pi}$ называется *годографом* функции $\vec{r}(u,v)$.

Наложим на функцию $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ условия

(1) $\vec{r}(u,v)$ есть функция класса C^3, т.е. существуют непрерывные частные производные этой функции до третьего порядка включительно.

(2) Векторы $\vec{r}_u = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\vec{r}_v = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ неколлинеарны в точках области $\mathbf{D}$. Неколлинеарность векторов означает, в частности, что они ненулевые, а также означает, что ранг следующей матрицы равен 2

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}.$$

Поверхность, заданная векторной функцией с указанными условиями, называется *регулярной класса* C^3. Область $\mathbf{D}$ задания поверхности можно считать окрестностью всякой ее внутренней точки $H(u,v)$, $a \le u \le b$, $c \le v \le d$. Всякая точка регулярной поверхности называется *обыкновенной*. Мы изучаем поверхности в окрестности обыкновенной точки.

10.2. **ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ**. Фиксируя на поверхности $\vec{r}(u,v)$ один из параметров, получаем на поверхности регулярную кривую, см. п. 8.1. Имеем следующие линии:

u-*линии* поверхности, это линии $\vec{r}(u,v_o)$, $v = v_o$ $const$;

v-*линии* $\vec{r}(u_o,v)$, $u = u_o$ $const$.

Всякие две u–линии и всякие две v–линии поверхности не пересекаются. Чрез каждую точку поверхности проходит единственная u–линия и единственная v–линия. Таким образом, на поверхности имеется криволинейная координатная сеть. С каждой точкой P поверхности связан репер $(P, \vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_u \times \vec{r}_v)$; производные $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ вычислены в точке P,

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Если в области $\mathbf{D}$ заданы функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, то на поверхности $\vec{r}(u,v)$ определяется линия

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t),v(t)) = (x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t))),\ t \in \mathbf{I} \subset \mathbf{D}.$$

Это произвольная линия на поверхности.

10.3. **КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ ПОВЕРХНОСТИ**. Пусть P точка регулярной поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. В этой точке имеем неколлинеарные векторы $\vec{r}_u, \vec{r}_v$. Для любой линии $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t),v(t))$ выполняется

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}_u u'_t + \vec{r}_v v'_t,$$

т.е. вектор касательной $\vec{r}'(t)$ всякой линии поверхности $\vec{r}(u,v)$, проходящей через точку P, является линейной комбинацией векторов $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ – векторов касательных u–линии и v–линии; вектор $\vec{r}'(t)$ принадлежит оболочке $\langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle$. Касательная прямая $\langle P, \vec{r}'(t) \rangle$ всякой кривой $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t),v(t))$ поверхности $\vec{r}(u,v)$ лежит в плоскости $\langle P,\vec{r}_u,\vec{r}_v\rangle$. Касательные всех линий поверхности $\vec{r}(u,v)$, проходящих через точку P, образуют плоскость. Получена следующая

10.3.1. ТЕОРЕМА. *Регулярная поверхность $\vec{r}(u,v)$ в каждой своей точке P обладает касательной плоскостью $\langle P,\vec{r}_u,\vec{r}_v\rangle$.* #

Пусть $P = (x_o, y_o, z_o)$ и производные $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ вычислены в точке P. Тогда уравнение касательной плоскости таково

$$\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}(x-x_o)+\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}(y-y_o)+\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}(z-z_o)=0.$$

Прямая $\langle P,\vec{r}_u\times\vec{r}_v\rangle$ называется нормалью поверхности $\vec{r}(u,v)$ в точке P. Ее уравнения:

$$\frac{x-x_o}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}=\frac{y-y_o}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}=\frac{z-z_o}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}.$$

10.4. **ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ**. В произвольной точке P поверхности $\vec{r}(u,v)$ зададим направление, выбрав $u=u(t)$, $v=v(t)$. Отношение дифференциалов

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'(t)}{v'(t)}$$

определяет направление на поверхности, имеем

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv.$$

Производная от $\vec{r}(u,v)$ по направлению $du:dv$ имеет вид

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{r}_u\frac{du}{ds}+\vec{r}_v\frac{dv}{ds}.$$

Малое смещение ds по кривой $\vec{r}(u(t),v(t))$ на поверхности вычисляется на основании равенств

$$|ds| = |d\vec{r}| = |\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv|.$$

Отсюда получаем, вычисляя скалярный квадрат $(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)^2 = |\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv|^2$

(10.4.1) $$ds^2 = \vec{r}_u^{\,2} du^2 + 2\vec{r}_u\vec{r}_v du dv + \vec{r}_v^{\,2} dv^2.$$

Введем обозначения:

(10.4.2) $$\vec{r}_u^{\,2} = E(u,v) = E,\ \vec{r}_u\vec{r}_v = F(u,v) = F,\ \vec{r}^{\,2} = G(u,v) = G.$$

Значения этих скалярных произведений зависят от выбора точки P поверхности. Выражение

(10.4.2) $$I = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

называется *первой основной квадратичной формой поверхности* $\vec{r}(u,v)$.

10.5. **МЕТРИКА НА ПОВЕРХНОСТИ**. Малое расстояние $|ds|$ на поверхности $\vec{r}(u,v)$ в направлении $du:dv$ может быть найдено по первой квадратичной форме

$$ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} .$$

На этом основании первая квадратичная форма поверхности определяет метрику на поверхности. Матрица Грама этой метрики:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 ,$$

см. пп. 4.1, 4.2. Детерминант метрической формы равен

$$\left|g_{ij}\right| = EG - F^2 .$$

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между которыми равен α, имеем

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha , \quad \vec{a}\ \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha ,$$

поэтому верно соотношение

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 + (\vec{a}\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 .$$

Перепишем это равенство для $\vec{r}_u, \vec{r}_v$:

$$(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)^2 + (\vec{r}_u\,\vec{r}_v)^2 = \vec{r}_u^{\,2}\,\vec{r}_v^{\,2} .$$

Отсюда, используя обозначения (10.4.2), находим

(10.5.1) $\quad (\vec{r}_u\times\vec{r}_v)^2 = \vec{r}_u^{\,2}\,\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u\,\vec{r}_v)^2 = EG - F^2 ,\ |\,\vec{r}_u\times\vec{r}_v\,| = \sqrt{EG - F^2} .$

Вместе с тем, получено

$$\left|g_{ij}\right| = EG - F^2 > 0$$

и детерминант первой квадратичной формы есть ее дискриминант.

Длину дуги кривой, проходящей через точку P в направлении $du:dv$ можно вычислить на основании дифференциала дуги ds (10.4.1):

$$l = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E(\frac{du}{dt})^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(\frac{dv}{dt})^2}\,dt .$$

Если через точку P проходит еще одна линия $\vec{r}(u_1(t), v_1(t))$ в направлении $du_1 : dv_1$, то угол φ между кривыми $\vec{r}(u(t),v(t))$ и $\vec{r}(u_1(t),v_1(t))$ есть угол между векторами $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ и $d_1\vec{r} = \vec{r}_u du_1 + \vec{r}_v dv_1$ и может быть найден из формулы

$$\cos\varphi = \frac{d\vec{r}\ \ d_1\vec{r}}{\sqrt{d\vec{r}}\sqrt{d_1\vec{r}}} = \frac{Edudu_1 + F(dudv_1 + du_1dv) + Gdvdv_1}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{Edu_1^{\,2} + 2Fdu_1dv_1 + Gdv_1^{\,2}}} .$$

Если первое направление есть направление $u-$линии: $du > 0$, $dv = 0$, второе направление есть направление $v-$линии: $du_1 = 0$, $dv_1 > 0$, и ϑ угол между $u-$линией и $v-$линией, то

$$\cos\vartheta = \frac{Fdudv_1}{\sqrt{E}du\sqrt{G}dv_1} = \frac{F}{\sqrt{EG}} .$$

Выполняется: $\vartheta = 90^o \Leftrightarrow F = 0$.

Элемент площади фигуры на поверхности равен

$$d\sigma = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2$$

и по (10.5.1):

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,dudv\,.$$

Теперь площадь фигуры Q, лежащей на поверхности $\vec{r}(u,v)$, вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_Q \sqrt{EG - F^2}\,dudv\,.$$

Итак, на основании первой квадратичной формы I (10.4.3) поверхности $\vec{r}(u,v)$ на поверхности вычисляются длины линий между заданными точками, углы между линиями и площади фигур, лежащих на поверхности, т.е. могут быть произведены все измерения. Форма I действительно является метрической.

§ 11. Кривизна поверхности.

11.1. **КРИВИЗНА ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ**. На поверхности $\vec{r}(u,v)$ рассматриваем линию $u = u(s)$, $v = v(s)$ в естественной параметризации

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(u(s),v(s))\,.$$

Согласно п. 9.1, кривизна кривой $\vec{r}(s)$ определяется из равенства

$$\ddot{\vec{r}} = k_1\vec{n}\,,$$

где k_1 кривизна кривой, $\vec{n}$ единичный вектор главной нормали кривой. Обозначим $\vec{m}$ единичный вектор нормали поверхности $\vec{r}(u,v)$, это вектор

(11.1.1) $$\vec{m} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}\,,$$

см. п. 10.3. Умножим скалярно $\ddot{\vec{r}}$ и $\vec{m}$:

$$\ddot{\vec{r}}\,\vec{m} = k_1\vec{n}\vec{m} = k_1\cos\vartheta\,,$$

если ϑ угол между $\vec{n}$ и $\vec{m}$. Величина

$$k_1\cos\vartheta = k_n$$

называется нормальной кривизной кривой $\vec{r}(s)$ на поверхности $\vec{r}(u,v)$ или нормальной кривизной поверхности:

(11.1.2) $$k_n = \ddot{\vec{r}}\,\vec{m} = k_1\cos\vartheta\,.$$

Вычислим k_n в окрестности точки $P = (x_o, y_o, z_o)$. Находим:

$$\dot{\vec{r}}(s) = \vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}\,,$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vu}\frac{dv}{ds}\frac{du}{ds} + \vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}\,,$$

$$k = \ddot{\vec{r}}\,\vec{m} = \vec{r}_{uu}\vec{m}(\frac{du}{ds})^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{m}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{m}(\frac{dv}{ds})^2,$$

здесь $\vec{r}_u\vec{m} = 0$ и $\vec{r}_v\vec{m} = 0$, так как $\vec{m} \perp \vec{r}_u, \vec{r}_v$. Обозначим:

$$\vec{r}_{uu}\vec{m} = L, \quad \vec{r}_u\,\vec{m} = M, \quad \vec{r}_{vv}\vec{m} = N.$$

На основании (11.1.1) и (10.5.1) имеем

$$L = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad M = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}}; \quad N = \frac{\vec{r}_u\vec{r}_v\vec{r}_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Коэффициенты L, M, N вычислены в точке P поверхности. Выражение для нормальной кривизны линии на поверхности таково

(11.1.3) $$k_n = L(\frac{du}{ds})^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N(\frac{dv}{ds})^2.$$

Отсюда получаем

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2}.$$

Воспользуемся значением ds^2 из первой квадратичной формы (10.4.3) поверхности

(11.1.4) $$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Квадратичная форма

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

называется *второй квадратичной формой поверхности*. Таким образом, нормальная кривизна поверхности есть отношение второй и первой квадратичных форм поверхности.

Рассмотрим на поверхности кривые, проходящие через точку P и имеющие с кривой $\vec{r}(s)$ общую соприкасающуюся плоскость. У этих кривых общий вектор касательной $\dot{\vec{r}}$ и общий вектор кривизны $\ddot{\vec{r}}$. Среди этих кривых находится плоская кривая, лежащая в соприкасающейся плоскости $\langle P, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}} \rangle$, эта плоскость содержит и нормаль $\vec{m}$ поверхности. Следовательно, выполняется

11.1.1. ТЕОРЕМА. *Нормальная кривизна поверхности в точке P есть кривизна нормального сечения поверхности.* #

11.2. **ИНДИКАТРИСА КРИВИЗНЫ**. В точке P поверхности **П** $\vec{r}(u,v)$ рассматриваем касательную плоскость π $\langle P, \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle$. Во всех направлениях в точке P в $du : dv$ и в $dv = 0$ к линиям $\vec{r}(s)$ на **П** проводим касательную прямую $\langle P, \dot{\vec{r}}(s) \rangle$, она лежит в плоскости π. Вектор касательной

$$\dot{\vec{r}}(s) = \vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}$$

выписан выше, в п. 11.1. В каждом направлении от точки P откладывается отрезок

$$PM = \pm\frac{1}{\sqrt{k_n}}.$$

В репере $(P,\vec{r}_u,\vec{r}_v)$ касательной плоскости π обозначим $M=(x,y)$. Тогда

$$x\vec{r}_u + y\vec{r}_v = \pm\frac{1}{\sqrt{k_n}}(\vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}).$$

Так как векторы $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ неколлинеарны, то

(11.2.1) $$x = \pm\frac{1}{\sqrt{k_n}}\frac{du}{ds},\quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{k_n}}\frac{dv}{ds}.$$

Выражения $\frac{du}{ds}$ и $\frac{du}{ds}$ через x и y подставим в формулу (11.1.3) нормальной кривизны поверхности:

$$\pm k_n = Lk_nx^2 + 2Mk_nxy + Nk_ny^2,$$

откуда получаем

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1.$$

Линия, определяемая этим уравнением, называется *индикатрисой кривизны* в точке P или *индикатрисой Дюпена*, и является центральной линией второго порядка – это либо эллипс, либо две сопряженные гиперболы, либо пара параллельных прямых. Значение детерминанта индикатрисы $\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}$ определяет вид индикатрисы.

11.3. **КЛАССФИКАЦИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ**. Точки регулярной поверхности $\vec{r}(u,v)$ различаются по виду индикатрисы кривизны поверхности в этих точках. Возможны следующие случаи.

(а) $LN - M^2 > 0$. Детерминант индикатрисы положителен, индикатриса является эллипсом. Точка P называется *эллиптической*. Касательная плоскость в точке P имеет с поверхностью одну общую точку – точку P.

(б) $LN - M^2 < 0$. Индикатриса есть пара гипербол. Точка P называется *гиперболической*. Касательная плоскость π пересекается с поверхностью **П** по двум прямым – асимптотам гипербол.

(в) $LN - M^2 = 0$. Индикатриса есть две параллельные прямые. Точка P называется *параболической*. Касательная плоскость π пересекает поверхность

П по прямой.

(г) $L = M = N = 0$. Индикатриса превращается в точку. P называется *точкой уплощения*. В этой точке по всем направлениям $k_n = 0$. Если **П** – плоскость, то всякая ее точка есть точка уплощения.

Направление на поверхности называется *асимптотическим*, если нормальная кривизна поверхности в этом направлении равна нулю: $k_n = 0$.

В асимптотическом направлении касательная плоскость к поверхности пересекается с поверхностью по прямой. Из предыдущего видно, что в эллиптической точке асимптотических точек нет (а), в гиперболической точке имеется два асимптотических направления (б), в параболической точке – одно асимптотическое направление (в); в точке уплощения всякое направление является асимптотическим (г).

11.4. **ГЛАВНЫЕ КРИВИЗНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ**. Относительно линий второго порядка на плоскости определены сопряженные направления. У эллипса (гиперболы, параболы, пары прямых) середины семейства параллельных хорд коллинеарны. Направления на плоскости, определяемые хордами и серединами параллельных хорд называются сопряженными. Взаимно перпендикулярные сопряженные направления называются *главными*. Относительно всякой линии второго порядка на плоскости существует или единственная пара главных направлений, или для любого направления имеется перпендикулярное сопряженное направление – как относительно окружности.

Индикатриса Дюпена в касательной плоскости поверхности в точке касания определяет главные направления. Кривизны нормальных сечений поверхности в главных направлениях называются *главными кривизнами*. Их обозначение: k_n^1, k_n^2. Произведение

$$K = k_n^1\, k_n^2$$

называется *полной* или *гауссовой кривизной* поверхности в данной точке P – в точке, где вычисляются коэффициенты квадратичных форм поверхности и рассматривается касательная плоскость. Полусумма

$$H = \frac{1}{2}(k_n^1 + k_n^2)$$

называется *средней кривизной* поверхности в точке P.

11.5. **ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛНОЙ И СРЕДНЕЙ КРИВИЗН ПОВЕРХНОСТИ**. Рассматриваем регулярную поверхность $\vec{r}(u,v)$ в окрестности точки P. Дифференциалы du, dv из (11.2.1) подставим в выражение (11.1.4) для нормальной кривизны поверхности. После сокращение на $k_n\, ds^2$ приходим к равенству

$$k_n = \frac{Lx^2 + 2Mxy + Ny^2}{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}.$$

Отсюда получаем

$$(L - k_n E)x^2 + 2(M - k_n F)xy + (N + k_n G)y^2 = 0.$$

Дифференцируем это равенство по x и по y:

$$\begin{cases}(L-k_nF)x+(M-k_nF)y=0,\\(M-k_nF)x+(N-k_nG)y=0.\end{cases}$$

Главные направления в касательной плоскости определяются этой системой уравнений, если она имеет ненулевые решения, т.е. в случае $\Delta=0$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}L-k_nE & M-k_nF\\ M-k_nF & N-k_nG\end{vmatrix}=0.$$

Значение определителя

$$k_n{}^2(TG-F^2)-k_n(EN-2FM+GL)+LN-M^2=0.$$

Главные кривизны k_n^1,k_n^2 есть корни выписанного уравнения. Воспользуемся теоремой Виетта:

$$K=k_n{}^1k_n{}^2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2},\quad H=\frac{1}{2}(k_n{}^1+k_n{}^2)=\frac{EN-FM+GL}{EG-F^2}.$$

Полная и средняя кривизны поверхности найдены без вычисления главных кривизн.

11.6. **ПЛОСКОСТЬ, СФЕРА, ПСЕВДОСФЕРА**. Проведем вычисления кривизн для указанных поверхностей.

(а) *Плоскость*. Ее задание

$$\vec{r}(u,v)\;=\;(p^1u+q^1v+a^1,\,p^2u+q^2v+a^2,\,p^3u+q^3v+a^3).$$

Находим частные производные:

$$\vec{r}_u=(p^1,p^2,p^3),\ \vec{r}_v=(q^1,q^2,q^3),\quad \vec{r}_{uu}=\vec{r}_{uv}=\vec{r}_{vv}=0.$$

По вычислительным формулам для L,M,N, п. 11.1, имеем: $L=M=N=0$. Значит, см. формулы для K и H в п. 11.5,

$$K=0,\ H=0.$$

Полная и средняя кривизны плоскости равны нулю.

(б) *Сфера*. Поверхность задается функцией

$$\vec{r}(u,v)\;=\;(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u).$$

Находим частные производные:

$\vec{r}_u\;=\;(-a\sin u\cos v,-a\sin u\sin v, a\cos u)$, $\vec{r}_v\;=\;(-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v,0)$,

$\vec{r}_{uu}\;=\;(-a\cos u\cos v,-a\cos u\sin v,-a\sin u)$,

$\vec{r}_{uv}\;=\;(a\sin u\sin v,-a\sin u\cos v,0)$, $\vec{r}_{vv}\;=\;(-a\cos u\cos v,-a\cos u\sin v,0)$.

Вычисляем коэффициенты первой квадратичной формы сферы, см. (10.4.2):

$$E\;=\;\vec{r}_u{}^2\;=\;a^2,\quad F\;=\;\vec{r}\ \vec{r}_v=0,\ \vec{r}_v{}^2\;=\;a^2\cos^2 u.$$

Детерминант первой квадратичной формы:

$$EG-F^2\;=\;a^4\cos^2 u.$$

Вычисляем коэффициенты второй квадратичной формы, п. 11.1:

$\vec{r}\ \times\vec{r}_v\;=\;(-a^2\cos^2 u\cos v,-a^2\cos^2 u\sin v,-a^2\sin u\cos u)$,

$\vec{r}\ \vec{r}_v\,\vec{r}_{uu}\;=\;a^3\cos u$, $\vec{r}_u\,\vec{r}\ \vec{r}_u\;=0$, $\vec{r}_u\,\vec{r}\ \vec{r}\;\;=\;a^3\cos^3 u$.

$$L = \frac{\vec{r}_u \vec{r}_v \vec{r}_{uu}}{\sqrt{EG - F^2}} = a\,; \quad M = \frac{\vec{r}_u \vec{r}_v \vec{r}_{uv}}{\sqrt{EG - F^2}} = 0; \quad N = \frac{\vec{r}_u \vec{r}_v \vec{r}_{vv}}{\sqrt{EG - F^2}} = a\cos^2 u\,.$$

Наконец, вычисляем полную и среднюю кривизну, п. 11.5:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{a^2}, \quad H = \frac{1}{2}\frac{EN - FM + GL}{EG - F^2} = \frac{1}{a}\,.$$

Полная и средняя кривизны сферы постоянны и положительны.

(в) *Псевдосфера*. Это поверхность, полученная в результате вращения трактрисы

$$\vec{r}(u) = (a\sin u, 0, a(\cos u + \ln tg\frac{u}{2}))$$

вокруг оси Oz. Поверхность задается функцией

$$\vec{r}(u,v) = (a\sin u\cos v, a\sin u\cos v, a(\cos u + \ln tg\frac{u}{2}))\,.$$

Находим частные производные

$\vec{r}_u = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\dfrac{\cos^2 u}{\sin u})$, $\vec{r}_v = (-a\sin u\sin v, a\sin u\cos v, 0)$,

$\vec{r}_{uu} = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, -a\cos u\dfrac{1+\sin^2 u}{\sin^2 u})$,

$\vec{r}_{uv} = (-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0)$, $\vec{r}_{vv} = (-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, 0)$.

Коэффициенты первой квадратичной формы псевдосферы:

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = a^2 ctg^2 u\,, \quad F = \vec{r}_u\,\vec{r}_v = 0,\ \vec{r}_v^{\,2} = a^2\sin^2 u\,.\ EG - F^2 = a^4\cos^2 u\,.$$

Находим произведения векторов и коэффициенты второй квадратичной формы поверхности:

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-a^2\cos^2 u\cos v, -a^2\cos^2 u\sin v, -a^2\sin u\cos u)$,

$\vec{r}_u\,\vec{r}_v\,\vec{r}_{uu} = -a^3\dfrac{\cos^2 u}{\sin u}$, $\vec{r}_u\,\vec{r}_v\,\vec{r}_{uv} = 0$, $\vec{r}_u\,\vec{r}_v\,\vec{r}_{vv} = a^3\sin u\cos^2 u$.

$$L = -a ctgu\,; \quad M = 0; \quad N = a\sin u\cos u\,.$$

Вычисляем полную и среднюю кривизну, п. 10.5:

$$K = -\frac{1}{a^2}, \quad H = \frac{1}{a}ctg2u\,.$$

Полная кривизна псевдосферы отрицательна и постоянна. За это свойство рассматриваемая поверхность названа псевдосферой.

Каждая точка плоскости есть точка уплощения, п. 11.3. Существуют и другие поверхности, имеющие нулевую полную кривизну. Например, цилиндр $\vec{r}(u,v) = (u, u^2, v)$ – поверхность нулевой полной кривизны.

Глава 4.

Основные понятия внутренней геометрии поверхности

В евклидовой геометрии есть самостоятельный раздел, называемый планиметрией. Свойства плоскости изучаются на основе взаимного расположения прямых плоскости, на свойствах расстояний между точками плоскости и углов между плоскими линиями. Также можно изучать свойства поверхностей, рассматривая ее геодезические линии и метрические соотношения на основе метрики на поверхности. Этот раздел дифференциальной геометрии называется внутренней геометрии поверхности. Дадим обзор некоторых свойств поверхностей и ее внутренней геометрии.

§ 12. Об определяемости поверхности.

12.1. **О ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ**. Свойства поверхности, основанные на ее метрической форме, составляют *внутреннюю геометрию поверхности*. А эти свойства, в свою очередь, основаны на свойствах первой квадратичной формы поверхности. Внутренняя геометрия поверхности является аналогом метрической геометрии плоскости – расстояния между точками измеряются отрезками прямых.

Длины отрезков кривых выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности; через эти коэффициенты вычисляются величины углов между линиями, площади участков поверхности. К внутренней геометрии поверхности относится полная кривизна поверхности, символы Кристоффеля, геодезическая кривизна поверхности и геодезические линии на поверхности.

Внутренняя геометрия поверхности аналогична евклидовой планиметрии – геометрии плоскости.

12.2. **ДЕРИВАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ПОВЕРХНОСТИ**. Регулярная поверхность класса C^3 задается 2-параметрической векторной функцией на некоторой связной области евклидовой плоскости:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v)\,,\ (u,v)\in \mathbf{D}\,.$$

В каждой точке поверхности вычисляются коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2;$$

$$E = \vec{r}_u^{\,2},\ F = \vec{r}_u\vec{r}_v,\ G = \vec{r}_v^{\,2};\ L = \vec{r}_{uu}\vec{n},\quad M = \vec{r}_{uv}\vec{n},\quad N = \vec{r}_{vv}\vec{n}.$$

В каждой точке P регулярной поверхности сущестует репер $(P,\vec{r}\ ,\vec{r}_v,\vec{n})$, где $\vec{n}$ единичный вектор нормали поверхности

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\|}.$$

В этом репере имеется разложение векторов

$$\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_{vv}, \vec{n}_u, \vec{n}_v.$$

Коэффициенты разложений характеризуют поверхность. Выпишем разложения

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\vec{r}_u + \Gamma^2_{11}\vec{r}_v + A_1\vec{n},\\
\vec{r}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\vec{r}_u + \Gamma^2_{12}\vec{r}_v + A_2\vec{n},\\
\vec{r}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\vec{r}_u + \Gamma^2_{22}\vec{r}_v + A_3\vec{n},\\
\vec{n}_u &= B_{11}\vec{r}_u + B_{12}\vec{r}_v + C_1\vec{n},\\
\vec{n}_v &= B_{21}\vec{r}_u + B_{22}\vec{r}_v + C_2\vec{n}.
\end{aligned}$$

Это *деривационные* формулы поверхности. Коэффициенты Γ^k_{ij} называются *символами Кристоффеля*, они выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности E, F, G и их первые производные.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{W}\left(\frac{1}{2}E_uG - F_uF + \frac{1}{2}E_vF\right),\quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{W}\left(-\frac{1}{2}E_uF + F_uE - \frac{1}{2}E_vE\right),$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{W}\left(\frac{1}{2}E_vG - \frac{1}{2}G_vF\right),\quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{W}\left(\frac{1}{2}G_uE - \frac{1}{2}E_vF\right),$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{W}\left(-\frac{1}{2}G_uG + F_vG - \frac{1}{2}G_vF\right),\quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{W}\left(\frac{1}{2}G_vE - F_vF + \frac{1}{2}G_vF\right),$$

где $W = EG - F^2 > 0$ дискриминант первой квадратичной формы. Остальные коэффициенты:

$$A_1 = L,\ A_2 = M,\ A_3 = N,\ C_1 = C_2 = 0,$$

$$B_{11} = \frac{1}{W}(NF - MG),\ B_{12} = \frac{1}{W}(LF - ME),$$

$$B_{21} = \frac{1}{W}(NF - MG),\ B_{22} = \frac{1}{W}(MF - NE).$$

12.3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

Дифференцируем векторы $\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_{vv}, \vec{n}_u, \vec{n}_v$. Исходя из разложения векторов

$$\vec{r}_{uuv},\ \vec{r}_{uvv},\ \vec{n}_{uv}$$

по подвижному базису $(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n})$, на основе деривационных формул поверхности получаем: *формулу Гаусса*

$$K=\frac{1}{4W^2}\begin{vmatrix}E & E_u & E_v\\ F & F_u & F_v\\ G & G_u & G_v\end{vmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{W}}\left(\left(\frac{E_v-F_u}{\sqrt{W}}\right)_v-\left(\frac{F_v-G_u}{\sqrt{W}}\right)_u\right),$$

две *формулы Петерсона-Кодацци*

$$2W(L_v-M_u)-(EN-FM+GL)(E_v-F_u)+\begin{vmatrix}E & E_u & L\\ F & F_u & M\\ G & G_u & N\end{vmatrix}=0,$$

$$2W(M_v-N_u)-(EN-FM+GL)(F_v-G_u)+\begin{vmatrix}E & E_v & L\\ F & F_v & M\\ G & G_v & N\end{vmatrix}=0.$$

Эти три формулы называются *основными уравнениями поверхности*.

Согласно формуле Гаусса, справедлива

12.3.1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ГАУССА. *Полная кривизна поверхности выражается только через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их производные. Следовательно, полная кривизна поверхности является объектом внутренней геометрии поверхности.*

Выполняется и следующее утверждение.

12.3.2. ТЕОРЕМА БОННЕ. *Существует регулярная поверхность, для которой заданные квадратичные формы I и II являются первой и второй квадратичными формами. Поверхность определяется однозначно с точностью до положения в пространстве.*

В доказательстве теоремы используются функции

$$E=E(u,v),\ F=F(u,v),\ G=G(u,v),\ L=L(u,v), M=M(u,v),\ N=N(u,v),$$

заданные на области $\mathbf{D}$ евклидовой плоскости и формулы Гаусса – Петерсона – Кодацци.

§ 13. Геодезическая кривизна поверхности.

13.1. **ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ КРИВИЗНА ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ**. Пусть $\vec r=\vec r(u,v)$, $(u,v)\in\mathbf{D}\subseteq\mathbf{E}^2$, регулярная поверхность класса C^3 и $\vec r=\vec r(s)=\vec r(u(s),v(s))$ линия на поверхности в естественной параметризации. Для линии $\vec r(s)$ определены линейно независимые векторы $\vec t=\dot{\vec r}$ – единичный вектор касательной, $\vec n=\dfrac{\vec r_u\times\vec r_v}{\|\vec r_u\times\vec r_v\|}$ – единичный вектор нормали к поверхности и вектор $\vec b=\vec n\times\vec t$. Вектор $\ddot{\vec r}=\dfrac{d^2\vec r}{ds^2}$ разлагается по векторам $\vec t,\vec n,\vec b$:

$$\ddot{\vec r}=a\vec t+b\vec n+c\vec b.$$

Коэффициент b при векторе $\vec n$ равен

$$b=\ddot{\vec r}\vec n=k_n$$

и называется *нормальной кривизной* линии $\vec{r}(s)$ на поверхности. Коэффициент c при векторе $\vec{b}$ называется *геодезической кривизной* линии $\vec{r}(s)$ на поверхности. Если $\vec{n}^0$ единичный вектор главной нормали кривой $\vec{r}(s)$ и k кривизна кривой, то геодезическая кривизна линии $\vec{r}(s)$ вычисляется как смешанное произведение векторов

$$k_g = k\vec{n}^0\vec{t}\,\vec{n}\,.$$

Если $u = u(t), v = v(t)$ произвольная параметризация линии $\vec{r}(t)$ на поверхности $\vec{r}(u,v)$, то имеем следующую формулу для вычисления геодезической кривизны линии

$$k_g = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}\,((u''+\Gamma_{11}^1u'^2+\Gamma_{12}^1u'v'+\Gamma_{22}^1v'^2)v' - (v''+\Gamma_{11}^2u'^2+\Gamma_{12}^2u'v'+\Gamma_{22}^2v'^2)u')\,.$$

Символы Кристоффеля Γ_{ij}^k выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их производные, п. 12.1, следовательно, имеет место

13.1.1. ТЕОРЕМА. *Геодезическая кривизна линий на поверхности является объектом внутренней геометрии поверхности.*

13.2. **ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ**. Линия на поверхности называется *геодезической*, если геодезическая кривизна этой линии в каждой ее точке равна нулю: k_g =0. Выполняются следующие утверждения.

13.2.1. ТЕОРЕМА. *Кривая на поверхности является геодезической, если и только если ее главная нормаль в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, совпадает с нормалью к поверхности.*

13.2.2. ТЕОРЕМА. *Через любую точку регулярной поверхности в любом направлении проходит геодезическая и только одна.*

13.2.3. ТЕОРЕМА. *Геодезические на поверхности обладают экстремальным свойством; если A и B две точки на поверхности, то длина геодезической не больше, чем длина всякой линии на поверхности, проходящей через точки A и B.*

Геодезическая на поверхности определяется уравнением $k_g = 0$, значение k_g выписано в предыдущем п. 13.1. Геодезическая кривизна линий на поверхности выражена через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и через символы Кристоффеля. Поэтому геодезические являются объектом внутренней геометрии поверхности.

На регулярной поверхности могут быть введены полугеодезические координаты – координатные линии одного семейства являются геодезическими, а линии другого семейства являются ортогональными траекториями к геодезическим, но не геодезические.

Глава 5

Элементы топологии

§ 14. Основные понятия топологического пространства.

14.1. **МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА**. Топологическое пространство определено выше, в п. 7.1. Напомним это определение. Рассматривается множество $\mathbf{X}$ и задана система подмножеств $T = \{U_\alpha\}$ множества $\mathbf{X}$. Система подмножеств T обладает свойствами:

(а) $\mathbf{X} \in T$, $\varnothing \in T$;

(б) объединение любого количества множеств из T принадлежит T;

(в) пересечение конечного количества множеств из T принадлежит T.

Тем самым на множестве $\mathbf{X}$ задана *топологическая структура* или *топология*. Пара $(\mathbf{X}, T)$ называется *топологическим пространством*. Разные системы подмножеств T задают разные топологии на множестве $\mathbf{X}$. Элементы множества $\mathbf{X}$ называются *точками*.

Примеры топологических пространств. $\mathbf{X}$ некоторое множество, $T = \wp(\mathbf{X})$ множество всех подмножеств множества $\mathbf{X}$. $(\mathbf{X}, \wp(\mathbf{X}))$ называется *дискретным* топологическим пространством. Пусть $T = \{\mathbf{X}, \varnothing\}$ – только два подмножества. $(\mathbf{X}, T)$ называется *антидискретным* топологическим пространством.

Подмножества U_α из T называются *открытыми* множествами в топологии $(\mathbf{X}, T)$. Дополнения $\mathbf{X} \setminus U_\alpha = \overline{U}_\alpha$ называются *замкнутыми* множествами в топологическом пространстве.

Открытые подмножества можно определить и иначе. Точка A называется *внутренней* точкой пространства $\mathbf{X}$, если существует подмножество U в $\mathbf{X}$, содержащее точку A. Подмножество Y называется открытым в $\mathbf{X}$, если оно состоит из внутренних точек. Для каждого конкретного множества $\mathbf{X}$ можно указать описание его открытых подмножеств. Например, пусть $\mathbf{X}$ есть множество кортежей $(x^1, x^2, ..., x^n)$ действительных чисел. Подмножество M кортежей называется *открытым*, если для каждой компоненты x^i, $i = \overline{1,n}$, указана пара чисел a^i, b^i, $a^i < b^i$, что $a^i < x^i < b^i$.

Подмножество U_α из T, содержащее точку A из $\mathbf{X}$, называется *окрестностью* точки A. Множество U является окрестностью каждой своей точки, если и только если оно открыто. Семейство B из T называется *базой* топологии T, если для всякого $A \in \mathbf{X}$ существует B_A, что $A \in B_A \subseteq U_\alpha$. Всякое множество из T является объединением множеств из базы. Пространство $(\mathbf{X}, T)$ называется *пространством со счетной базой*, если оно обладает хотя бы одной базой, состоящей из не более чем счетного подмножества множеств $\mathbf{X}$.

Пространство $\mathbf{X}$ называется *хаусдорфовым*, если для любых двух точек A, B из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$ существуют окрестности U_A и U_B, что $U_A \cap U_B = \varnothing$.

Множество $\mathbf{X}$ называется *метрическим пространством*, если существует отображение ρ: $\mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbf{R}^+$ пар точек из $\mathbf{X}$ во множество неотрицательных действительных чисел $\mathbf{R}^+$, удовлетворяющее условиям

(а) $\rho(A,B) = 0$, если и только если $A = B$;

(б) $\rho(A,B) = \rho(B,A)$;

(в) $\rho(A,B) + \rho(B,C) \geq \rho(A,C)$.

Это определение *евклидова метрического пространства*, см. п. 7.2. Точнее, под метрическим пространством понимается пара $(\mathbf{X}, \rho)$.

Неотрицательное число, соответствующее паре точек A, B, называется *расстоянием* между точками A и B. Разные отображения ρ определяют на $\mathbf{X}$ различные метрические пространства.

Примеры метрических пространств.

1. Во всяком множестве
$\rho(A,B) = 1$, если $A \neq B$; $\rho(A,B) = 0$, если $A = B$.

2. Во множестве $\mathbf{R}^n$ кортежей действительных чисел, $A = (a^1, a^2, ..., a^n)$, $B = (b^1, b^2, ..., b^n)$; $\rho(A,B) = \sqrt{(b^1 - a^1)^2 + (b^2 - a^2)^2 + ... + (b^n - a^n)^2}$.

Открытым шаром в метрическом пространстве $\mathbf{X}$ с центром в точке A и радиусом r называется множество точек M, удовлетворяющих условию $\rho(A,M) < r$. Для метрического пространства $\mathbf{X}$ можно рассматривать множество R всех открытых шаров с центрами во всех точках и произвольными радиусами и пересечения и объединения этих шаров. Получаем топологическое пространство $(\mathbf{X}, R)$.

Понятия метрического пространства и топологического пространства независимы.

В аффинном пространстве не введено расстояние между точками, поэтому оно не является метрическим. Открытыми множествами в аффинном пространстве считаются открытые параллелепипеды. Поэтому аффинное пространство является топологическим пространством, не являясь метрическим.

Точка B называется *внешней* точкой подмножества V из $\mathbf{X}$, если существует окрестность точки B, не содержащая точек из V. Точка B называется *граничной* точкой подмножества V, если существует окрестность точки B, содержащая как внутренние точки множества V, так и внешние точки множества V. Объединение всех граничных точек множества V называется его *границей* и обозначается ∂V. *Замыканием* множества V называется объединение $V \cup \partial V = \overline{V}$.

Множество V называется *ограниченным*, если существует открытый шар, содержащий множество V.

Топологическое пространство *метризуемо*, если в нем можно ввести метрику. Семейство открытых множеств T обычно состоит из открытых шаров. Возможно, что семейство T открытых множеств топологического пространства состоит из открытых параллелепипедов. Это *естественная* топология.

14.2. **НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ГОМЕОМОРФИЗМ**. Непрерывные отображения множеств рассмотрены ранее, в п. 7.1. Напомним основные понятия.

Пусть $(\mathbf{X},T)$ и $(\mathbf{Y},S)$ топологические пространства. Отображение $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ называется *непрерывным в точке* $x\in\mathbf{X}$, если для любой окрестности V точки $f(x)$ в $\mathbf{Y}$ существует окрестность U точки x в $\mathbf{X}$, что $f(U)\subseteq V$. Отображение f *непрерывно*, если оно непрерывно в каждой точке $x\in\mathbf{X}$. Выполняется следующий критерий: *отображение f топологического пространства $(\mathbf{X},T)$ в топологическое пространство $(\mathbf{Y},S)$ непрерывно, если и только если прообраз любого открытого множества из $\mathbf{Y}$ является открытым в $\mathbf{X}$.*

Отображение $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ называется *гомеоморфным* или *топологическим*, если оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно, т.е. f и f^{-1} однозначны и непрерывны. Если f гомеоморфизм, то топологические пространства $(\mathbf{X},T)$ и $(\mathbf{Y},S)$ называются *гомеоморфными*; обозначение: $\mathbf{X}\sim\mathbf{Y}$.

На классе топологических пространств, где определены гомеоморфные отображения, отношение гомеоморфности рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности. Элементы фактор-множества по отношению гомеоморфности называются *топологическими типами. Топология изучает свойства топологических пространств, инвариантных в гомеоморфизмах.*

Гомеоморфны:

(а) открытый отрезок и прямая;
(б) отрезок с концами A, B и полуокружность с концами C, D;
(в) луч и полуоткрытый интервал;
(г) открытый круг и открытый параллелограмм;
(д) открытый круг и плоскость;
(е) полусфера без границы и открытый круг
и т.д.

14.3. **ОТДЕЛИМОСТЬ. КОМПАКТНОСТЬ. СВЯЗНОСТЬ**. Хаусдорфово топологическое пространство, п. 7.1, называется еще *отделимым*. Отделимы, например, все метрические пространства; аффинное пространство; пространство с дискретной топологией, содержащее не менее двух точек. Неотделимо пространство с антидискретной топологией, содержащее не двух точек.

Семейство $\{U_\alpha\}$ подмножеств множества $\mathbf{X}$ называется *покрытием* множества $\mathbf{X}$, если $\mathbf{X} \subseteq \bigcup U_\alpha$. Покрытие $\{U_\alpha\}$ называется *открытым*, если все множества семейства $\{U_\alpha\}$ открыты. Подпокрытием покрытия $\{U_\alpha\}$ называется такое подсемейство, которое само является покрытием.

Топологическое пространство $(\mathbf{X}, T)$ называется *компактным*, если каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Множество A пространства $(\mathbf{X}, T)$ называется *компактным*, если подпространство A компактно. Компактны: отрезок, окружность, сфера. Некомпактны: плоскость, 3-мерное пространство и т.д. Выполняется критерий: подмножество A в евклидовом пространстве компактно, если и только если оно замкнуто и ограничено. Например, открытый шар некомпактен – он ограничен но не замкнут.

Покрытие множества $\mathbf{X}$ называется его *разбиением*, если элементы покрытия непустые множества и всякие два элемента покрытия имеют пустое пересечение. Топологическое пространство $(\mathbf{X}, T)$ называется *связным*, если не существует его разбиения на два открытых множества. Связны: прямая, окружность, плоскость. Несвязна гипербола.

§ 15. О замкнутых поверхностях.

15.1. **РАЗРЕЗАНИЕ И СКЛЕИВАНИЕ**. Рассматриваем 2-мерные замкнутые многообразия.

Пусть $ABC...M$ и $EHF...N$ два многоугольника, они ограничены замкнутыми ломаными линиями. Ребра AB и EH также ограничены их концами. Всякие два отрезка гомеоморфны. Установим гомеоморфизм h между отрезками AB и EH и отождествим точки отрезков, соответствующие друг другу в гомеморфизме h: если $K \in AB,\ L \in EH$ и $h: K \leftrightarrow L$, то две точки K и L считаем за одну точку, т. е. отождествлям. Такое отождествление отрезков называем их *склеиванием*. Это склеивание многоугольников $ABC...M$ и $EHF...N$ по их ребрам AB и EH.

Имея четыре треугольника, можно, склеивая стороны разных треугольников, получить тетраэдр. Если $ABCD$ прямоугольник, то склеивая стороны AB и DC так, чтобы совпали точки A и D, B и C соответственно, получаем цилиндр. Склеивая стороны AB и CD так, чтобы совпали точки A и C, B и D, получаем ленту Мёбиуса. У цилиндра имеется граница, состоящая из двух несвязных линий, гомеоморфных окружности. Цилиндр имеет две стороны. У ленты Мёбиуса – граница есть одна непрерывная линия, гомеоморфная окружности. Лента Мёбиуса – односторонняя поверхность: это хорошо видно при покраске ленты.

Пусть теперь F плоская фигура с границей ∂ и A,B две точки на границе. Соединим точки A,B некоторой линией l, лежащей в фигуре. Каждую точку M линии l считаем двумя точками M_1 и M_2. Тем самым фигура F *разрезается* по линии l. Возможно, что получится две фигуры, а возможно одна с границей ∂ плюс удвоенная l. Например, цилиндр можно разрезать, получив прямоугольник; или от цилиндра можно отрезать полукруг. Можно из фигуры F вырезать часть, взяв на F замкнутую линию и произведя по ней разрез. Линия разреза не имеет с границей фигуры общих точек. Получится новая фигура F_o с дыркой, ее граница несвязна и состоит из линии разреза и границы ∂; и новая фигура есть вырезанная часть, ограниченная разрезом.

15.2. **ЭЛЕМЕНТЫ КЛАССФИКАЦИИ ЗАМКНУТЫХ КОМПАКТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ БЕЗ ГРАНИЦЫ**. Простейшей компактной поверхностью, замкнутой и не имеющей границы, является сфера. Это двухсторонняя поверхность.

Вырежем на сфере две дырки. Имеем поверхность, граница которой состоит из двух несвязных замкнутых линий, гомеоморфных окружности. Цилиндр также имеет границу, состоящую из двух замкнутых несвязных линий, гомеоморфных окружности. Приклеим цилиндр к сфере так, чтобы граница цилиндра с одной стороны склеилась с границей сферы по одной дырке, а граница цилиндра с другой стороны склеилась с границей сферы по другой дырке. Получаем сферу с ручкой – двухстороннюю поверхность, гомеоморфную тору.

Вырежем на сфере одну дырку. Граница полученной поверхности гомеоморфна окружности. Лента Мёбиуса также имеет границу, гомеоморфную окружности. Заклеим дырку на сфере лентой Мёбиуса, склеивая их границы. (Выполнить такое склеивание практически невозможно, но абстрактное отождествление границ возможно.) Лента Мёбиуса имеет одну сторону, значит, полученная в результате склеивания поверхность тоже односторонняя.

Две сферы, дырки на которых заклеены разным количеством ручек и разным количеством листов (лент) Мёбиуса, принадлежат к разным топологическим типам поверхностей. Всякая компактная замкнутая ограниченная поверхность без границы гомеоморфна сфере с некоторым числом ручек и с некоторым числом дырок, заклеенных листами Мёбиуса.